

# Ecuaciones Integrales Lineales

Antonio Hernández Cabrera  
Departamento de Física Básica  
Universidad de La Laguna  
Tenerife. Islas Canarias  
ajhernan@ull.es

6 de febrero de 2008



# Índice general

<b>1. Ecuaciones integrales lineales</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción . . . . .	7
1.2. Definiciones simbólicas . . . . .	7
1.2.1. 1. Fredholm 1ª clase . . . . .	7
1.2.2. 2. Fredholm 2ª clase . . . . .	8
1.2.3. 3. Volterra 1ª clase . . . . .	8
1.2.4. 4. Volterra 2ª clase . . . . .	8
1.2.5. Ejemplo: Teoría del transporte de neutrones. Ecuación de Boltzmann. . . . .	9
1.2.6. Ejemplo: Representación momento en mecánica cuántica.	11
1.2.7. Ejemplo. Ecuación diferencial. . . . .	13
1.3. Transformadas integrales . . . . .	16
1.3.1. Fredholm de 1º clase . . . . .	16
1.3.2. Fredholm 2ª clase. . . . .	17
1.3.3. Volterra 1ª clase. . . . .	17
1.3.4. Volterra 2ª clase. . . . .	17
1.3.5. Ejemplo . . . . .	18
1.4. Núcleo como función generatriz. . . . .	18
1.5. Teoremas de Fredholm . . . . .	20
1.5.1. Teorema I: . . . . .	22
1.5.2. Teorema II: 23	
1.5.3. Teorema III: . . . . .	23
1.6. Ecuaciones integrales con núcleos separables o degenerados. . .	23
1.7. Series de Neumann. Núcleos pequeños . . . . .	27
1.7.1. Ejemplo . . . . .	29
1.8. Método de la resolvente de Fredholm . . . . .	30

1.8.1. Ejemplo . . . . .	31
1.9. Método de Hilbert-Schmidt. Núcleos simétricos . . . . .	34
1.9.1. Norma de una función . . . . .	35
1.9.2. Convergencia de funciones . . . . .	35
1.9.3. Producto escalar de dos funciones . . . . .	35
1.9.4. Conjunto de funciones ortonormales . . . . .	36
1.9.5. Coeficientes de Fourier de $f(x)$ . . . . .	36
1.9.6. Teorema . . . . .	36
1.9.7. Teorema: . . . . .	38
1.9.8. Aplicación a las ecuaciones integrales . . . . .	38
1.9.9. Teorema de Hilbert-Schmidt . . . . .	40
1.9.10. Teorema del desarrollo del núcleo . . . . .	40
1.9.11. Método de Hilbert-Schmidt: Ec. inhomogéneas . . . . .	41
1.10. Ecuaciones de Volterra . . . . .	47

## PREÁMBULO

Cuando estudiaba físicas, hace ya unas cuantas décadas, las ecuaciones integrales llamaron mi atención por su potencial aplicabilidad. Sin embargo, hasta mucho tiempo después, trabajando con problemas de fotoexcitación, no tuve que utilizarlas. Mi experiencia en resolver problemas basados en la ecuación matricial de Liouville ha hecho que encuentre un sinnúmero de posibilidades para aplicar la teoría de las ecuaciones integrales. Sin embargo, estos son unos simples apuntes, restringidos a las ecuaciones lineales. Escribir un libro de ecuaciones integrales es un trabajo mucho más complejo y que requiere años de dedicación. Aquí me centraré en unir generalidad con simplicidad dado que tan solo tenemos poco más de quince días de curso académico para desarrollar el temario.

Estos apuntes están dedicados a todos los profesores que son víctimas de la extorsión intelectual de esa nueva modalidad de charlatán de feria llamada pedagogo.



# Capítulo 1

## Ecuaciones integrales lineales

### 1.1. Introducción

Las ecuaciones integrales lineales son aquellas que contienen a la función incógnita bajo el signo integral. Es decir, la incógnita forma también parte del integrando. Se suelen clasificar de dos formas: por el tipo de límites de integración y por la ocurrencia de la función incógnita. El primer tipo de clasificación sería:

1. **Ecuaciones de Fredholm**, cuando los límites de integración son definidos.

2. **Ecuaciones de Volterra**, si alguno de los límites es variable.

Ateniéndonos a la función incógnita, la clasificación será:

1. **Primera clase**, cuando la función incógnita sólo aparece en el integrando.

2. **Segunda clase**, si la función incógnita aparece dentro y fuera de la integral.

### 1.2. Definiciones simbólicas

#### 1.2.1. 1. Fredholm 1<sup>a</sup> clase

$$f(x) = \int_a^b K(x, t)y(t)dt. \quad (1.1)$$

**1.2.2. 2. Fredholm 2ª clase**

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt. \quad (1.2)$$

**1.2.3. 3. Volterra 1ª clase**

$$f(x) = \int_a^x K(x, t)y(t)dy. \quad (1.3)$$

**1.2.4. 4. Volterra 2ª clase**

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)y(t)dt. \quad (1.4)$$

Caso de que  $f(x) = 0$  estaríamos en el caso de las ecuaciones homogéneas. Si  $f(x) \neq 0$ , tendríamos las inhomogéneas. En todos los casos la única función desconocida es  $y(x)$ . La función de dos variable  $K(x, t)$  recibe el nombre de **NÚCLEO** (Kernel).

Las ecuaciones integrales suelen aparecer en determinados problemas físicos, como veremos. Conviene analizar sus métodos de resolución por dos razones fundamentales:

1. Para resolver ecuaciones diferenciales con determinadas condiciones particulares de contorno. Recordemos que, en las ecuaciones de Bessel, la condición  $r = 0$  determinaba si existía o no la función de Neumann  $N_n(r)$  como solución. En las ecuaciones de Bessel modificadas, la condición  $r \rightarrow \infty$  determinaba la existencia de la solución  $I_n(r)$ . Las ecuaciones integrales relacionan a la función incógnita no sólo con sus valores en la frontera a través de las derivadas, sino también en toda una región que incluye dicha frontera. Los límites de integración determinan ya de por sí una región con unas condiciones previas, sin tener que añadir al final condiciones adicionales.

2. La forma de los núcleos depende de los valores de contorno. Por lo tanto, las ecuaciones integrales son compactas (autoconsistentes) y pueden ser una forma más poderosa o conveniente para resolver problemas que las ecuaciones diferenciales. Además, existen problemas como los fenómenos de transporte o difusión que no admiten una forma explícita como ecuación diferencial.



### 1.2.5. Ejemplo: Teoría del transporte de neutrones. Ecuación de Boltzmann.

La ecuación fundamental del transporte de neutrones se obtiene a través de la ecuación de la continuidad de neutrones. Es decir,

$$\text{Producción} = \text{Pérdidas} + \text{Fugas}.$$

En la parte de producción de neutrones tendremos esencialmente las fuentes:

$$S(v, \vec{\Omega}, \vec{r}) dv d\vec{\Omega}, \quad (1.5)$$

que representa a  $S$  neutrones generados por  $\text{cm}^3$  y segundo, con velocidades comprendidas entre  $v$  y  $v + dv$ , moviéndose en la dirección  $\vec{\Omega}$ , comprendida dentro de un ángulo sólido  $d\vec{\Omega}$ . Otra fuente adicional de neutrones es la proporcionada por las colisiones que dispersan a aquellos neutrones que, en principio, se movían dentro de otros márgenes pero pasan a estar dentro de los parámetros  $v, \vec{\Omega}, \vec{r}$  adecuados después de la dispersión. Es decir, que iban descarriados pero que, después de colisionar con la fe verdadera, se agrupan en el redil pertinente.

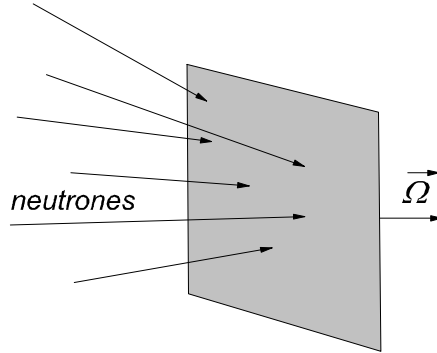
La proporción debida al scattering (dispersión) viene dada por

$$\sum_s (v, v', \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') \varphi(v', \vec{\Omega}', \vec{r}). \quad (1.6)$$

donde  $\sum_s$  es la probabilidad (macroscópica) de que un neutrón con velocidad  $v'$  y dirección  $\vec{\Omega}'$  se disperse pasando a tener velocidad  $v$  y dirección  $\vec{\Omega}$ . La cantidad  $\varphi(v', \vec{\Omega}', \vec{r})$  representa al flujo total de neutrones (neutrones que atraviesan determinada área en cierto tiempo).

El flujo vectorial lo podemos poner como  $\vec{\varphi} = \vec{\Omega} \varphi$ , con la dirección de la velocidad neutrónica y magnitud igual al número de neutrones con velocidad  $v$  que atraviesan, por segundo, una unidad de área situada a la posición  $\vec{r}$ , y en una dirección  $\vec{\Omega}$ . Integrando sobre todas las velocidades iniciales ( $v'$ ) y sobre todas las direcciones ( $\vec{\Omega}'$ ), obtenemos el término de producción de neutrones debido a los procesos dispersivos

$$\int \int \sum_s (v, v', \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') \varphi(v', \vec{\Omega}', \vec{r}) dv' d\vec{\Omega}'. \quad (1.7)$$



Las pérdidas se pueden producir por fugas, en cuyo caso vienen descritas por el teorema de Gauss,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}(v, \vec{\Omega}, \vec{r}) \quad (1.8)$$

que es la cantidad de neutrones que escapan por unidad de superficie con dirección  $\vec{\Omega}$ . También existen pérdidas por absorción de algún medio material absorbente (grafito, agua pesada,...), y por dispersión de los buenos neutrones iniciales hacia el ateísmo (dispersión con las sagradas escrituras y el sentido común) con velocidades más bajas, fuera del rango en estudio. Estas pérdidas vendría descritas por

$$\left| \sum_a (v) + \sum_s (v) \right| \varphi(v, \vec{\Omega}, \vec{r}), \quad (1.9)$$

donde  $\sum_a (v)$  representa la probabilidad de que un neutrón sea absorbido y  $\sum_s (v)$  de que se disperse.

Evidentemente, si el medio no es homogéneo ni isótropo, las  $\sum$  deberían

incluir la dependencia con la posición y dirección, además de la dependencia con la velocidad.

La **ecuación de continuidad** queda entonces como

$$\int \int \sum_s (v, v', \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') \varphi(v', \vec{\Omega}', \vec{r}) dv' d\vec{\Omega}' + S(v, \vec{\Omega}, \vec{r}) = \quad (1.10)$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{\varphi}(v, \vec{\Omega}, \vec{r}) + \left| \sum_a (v) + \sum_s (v) \right| \varphi(v, \vec{\Omega}, \vec{r}),$$

con  $\vec{\varphi} = \vec{\Omega} \varphi$ . Esta es la ecuación de Boltzmann para el estado estacionario, donde se equilibran la producción y pérdidas de neutrones. Como vemos, es una ecuación integral. En la anterior forma la ecuación es casi imposible de tratar. El personal utiliza aproximaciones que lleguen a soluciones de compromiso entre la exactitud física y la posibilidad matemáticas de resolverlas.

Las integrales anteriores se extienden a todo el volumen del reactor nuclear correspondiente. La ecuación es una de Fredholm de 2ª clase.

### 1.2.6. Ejemplo: Representación momento en mecánica cuántica.

La ecuación de Schrödinger, en la representación en el espacio ordinario, es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}), \quad (1.11)$$

o, de forma más simplificada,

$$(-\nabla^2 + a^2) \psi(\vec{r}) = v(\vec{r}) \psi(\vec{r}), \quad (1.12)$$

siendo  $a^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} E$  y  $v(\vec{r}) = -\frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r})$ . La anterior ecuación puede generalizarse como

$$(-\nabla^2 + a^2) \psi(\vec{r}) = \int v(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r', \quad (1.13)$$

siempre que el potencial sea puntual, es decir,  $v(\vec{r}, \vec{r}') = v(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ . Es decir, cuando trabajamos con una interacción de tipo local. Transforman-

do por Fourier,

$$\begin{aligned}\phi(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \psi(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r}, \\ \psi(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \phi(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{k}.\end{aligned}\quad (1.14)$$

Recordemos que  $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} = 2\pi$  n<sup>o</sup> de onda. Transformando la ecuación integral,

$$\int (-\nabla^2 + a^2)\psi(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r} = \int \int v(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r} d^3\vec{r}', \quad (1.15)$$

donde  $\nabla^2$  sólo actúa sobre  $\psi(\vec{r}')$ . Integrando por partes el miembro de la izquierda,

$$\int (k^2 + a^2)\psi(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r} = (2\pi)^{3/2} (k^2 + a^2) \phi(\vec{k}). \quad (1.16)$$

Sustituyendo  $\psi(\vec{r}')$  por su transformada

$$\begin{aligned}(2\pi)^{3/2} (k^2 + a^2) \phi(\vec{k}) &= \\ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \int \int v(\vec{r}, \vec{r}') \phi(\vec{k}') e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \vec{k}'\cdot\vec{r}')} d^3\vec{r} d^3\vec{r}' d^3\vec{k}'.\end{aligned}\quad (1.17)$$

Si llamamos

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int v(\vec{r}, \vec{r}') e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \vec{k}'\cdot\vec{r}')} d^3\vec{r} d^3\vec{r}' \quad (1.18)$$

llegamos a que

$$(k^2 + a^2) \phi(\vec{k}) = \int f(\vec{k}, \vec{k}') \phi(\vec{k}') d^3\vec{k}', \quad (1.19)$$

que es una ecuación homogénea de Fredholm de 2<sup>a</sup> clase, en la cual  $a^2$  corresponde al autovalor.

En el caso de interacciones locales,  $f(\vec{k}, \vec{k}') = f(\vec{k} - \vec{k}')$ , lo cual facilitará la resolución del problema. Para hacer el anterior planteamiento hemos supuesto que la función y el potencial admite transformada de Fourier (TF). Para el potencial de un oscilador lineal,  $V(\vec{r}) = r^2$ , no existen las integrales necesarias, ya que las TF conducen a oscilaciones divergentes.

### 1.2.7. Ejemplo. Ecuación diferencial.

Existen casos donde ha de decidirse si es más conveniente resolver una ecuación integral (EI) que una diferencial (ED). Ambas son autotransformables entre sí. Supongamos que tenemos una ED genérica de 2º grado

$$y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = g(x), \quad (1.20)$$

con las condiciones de contorno  $y(a) = y_0$ ,  $y'(a) = y'_0$ . Integrando obtenemos

$$y' = - \int_a^x Ay'dx - \int_a^x B y dx + \int_a^x g dx + y'_0. \quad (1.21)$$

Integrando por partes la primera integral de la derecha,

$$y' = -Ay - \int_a^x (B - A')y dx + \int_a^x g dx + A(a)y_0 + y'_0, \quad (1.22)$$

domde hemos ido absorbiendo las condiciones de contorno. Integrando nuevamente,

$$y' = - \int_a^x Ay dx - \int_a^x \int_a^x [B(t) - A'(t)] y(t) dy dx + \int_a^x \int_a^x g(t) dt dx + [A(a)y_0 + y'_0] (x - a) + y_0. \quad (1.23)$$

Conviene reescribir la ecuación integral de forma más clara. Para ello aprovechamos la relación

$$\int_a^x \int_a^x f(t) dt dx = \int_a^x (x - t) f(t) dt \quad (1.24)$$

igualdad que puede comprobarse diferenciando ambos miembros. La única diferencia está en una constante que desaparece si  $x \rightarrow a$ . Por lo tanto,

$$y(x) = - \int_a^b \{A(t) + (x - t) [B(t) - A'(t)]\} y(t) dt + \int_a^x (x - t) g(t) + [A(a)y_0 + y'_0] (x - a) + y_0. \quad (1.25)$$

Introduciremos la siguiente abreviación:

$$K(x, t) = (x - t) [B(t) - A'(t)] - A(t), \\ f(x) = \int_a^x (x - t) g(t) + [A(a)y_0 + y'_0] (x - a) + y_0. \quad (1.26)$$

con lo que

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)y(t)dt, \quad (1.27)$$

que es una ecuación de Volterra de 2ª clase.

Un ejemplo clásico de lo arriba expuesto es el **oscilador armónico**:

$$y'' + \omega^2 y = 0, \text{ con } \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases} \quad (1.28)$$

En este caso,  $A(x) = 0$ ,  $B(x) = \omega^2$ ,  $g(x) = 0$ , con lo que  $K(x, t) = (t - x)\omega^2$  y  $f(x) = \int_0^x (x - t) \cdot 0 \cdot dt + x = 0$  y la ecuación integral correspondiente sería

$$y(x) = x + \omega^2 \int_0^x (t - x)y(t)dt, \quad (1.29)$$

Volterra de 2ª clase. Parece fácil ver que satisface  $y(x) = \frac{\sin \omega x}{\omega}$ . Si se dieran dos condiciones de contorno

$$\begin{aligned} y(a) &= 0 \\ y(b) &= 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

tendríamos que modificar el procedimiento ya que desconocemos  $y'(0)$ . La primera integral conduce a

$$y' = -\omega^2 \int_0^x y dx + y_0. \quad (1.31)$$

Volviendo a integrar,

$$y = -\omega^2 \int_0^x (x - t)y(t)dt + y'(0)x. \quad (1.32)$$

Si imponemos que  $y(b) = 0 \implies$

$$\begin{aligned} \omega^2 \int_0^b (b - t)y(t)dt &= by'(0) \implies \\ y'(0) &= \frac{\omega^2}{b} \int_0^b (b - t)y(t)dt \\ \implies y' &= -\omega^2 \int_0^b (x - t)y(t)dt + \\ &\quad \frac{\omega^2}{b} \int_0^b (b - t)y(t)dt, \end{aligned} \quad (1.33)$$

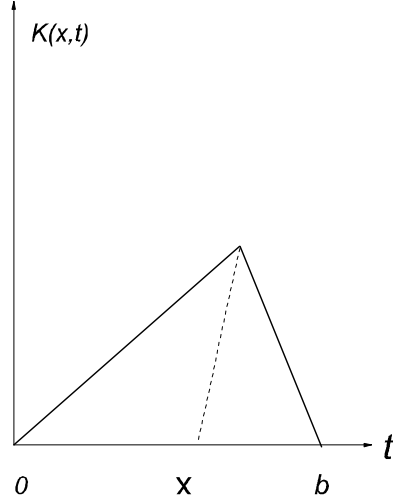


Figura 1.1: Núcleo para el oscilador armónico.

o bien,

$$y(x) = \omega^2 \int_0^b \frac{t}{b}(b-x)y(t)dt + \omega^2 \int_0^b \frac{x}{b}(b-t)y(t)dt. \quad (1.34)$$

Si definimos un núcleo tal que

$$K(x,t) = \begin{cases} t/b(b-x) & \text{para } t < x \\ x/b(b-t) & \text{para } x < t \end{cases} \Rightarrow \\ K(x,t) = \frac{t}{b}(b-x)\theta(x-t) + \frac{x}{b}(b-t)\theta(t-x), \quad (1.35)$$

donde  $\theta(x)$  es la función de escalón de Heaviside. Sustituyendo llegamos a que

$$y(x) = \omega^2 \int_0^b K(x,t)y(t)dt \quad (1.36)$$

que es una ecuación de Fredholm de 2ª clase, homogénea.

### 1.3. Transformadas integrales

Toda ecuación que su núcleo tenga la forma  $K(x, t) = K(x - t)$  es abordable mediante transformadas integrales, siempre y cuando tanto  $f(x)$  como  $k(x, t)$  admitan transformada. Si los límites son entre  $-\infty$  e  $\infty$ , lo apropiado es recurrir a Fourier. Si no, a Laplace.

#### 1.3.1. Fredholm de 1<sup>o</sup> clase

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\varphi(t)dt, \quad (1.37)$$

donde  $\varphi(x)$  es la incógnita. Empezamos aplicando el teorema de convolución:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(t)\Phi(t)e^{-ixt}dt, \quad (1.38)$$

donde  $\kappa(t)$  y  $\Phi(t)$  son las transformadas de Fourier de  $K(x)$  y  $\varphi(t)$ . Desahaciendo la transformación,

$$\kappa(t)\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixt}dx = F(t), \quad (1.39)$$

donde hemos usado

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{ixt}dx, \\ \Phi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{ixt}dx. \end{aligned} \quad (1.40)$$

junto al teorema de convolución. Así,

$$\Phi(t) = \frac{F(t)}{\kappa(t)} \quad (1.41)$$

y

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)}{\kappa(t)} e^{-ixt}dt, \quad (1.42)$$

salvo constante.



**1.3.2. Fedholm 2<sup>a</sup> clase.**

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\varphi(t)dt. \quad (1.43)$$

Siguiendo el mismo procedimiento llegamos a que

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)}{1 - \sqrt{2\pi}\kappa(t)} e^{-ixt} dt. \quad (1.44)$$

**1.3.3. Volterra 1<sup>a</sup> clase.**

Cuando alguno de los límites es indefinido, tenemos una ecuación de Volterra. En dicho caso es aconsejable recurrir a las transformadas de Laplace. Partimos de

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)K(x-t)dt. \quad (1.45)$$

Aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación y el teorema de convolución:

$$\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}\left[\int_0^x \varphi(t)K(x-t)dt\right] = \mathcal{L}[\varphi(x)] \mathcal{L}[K(x)], \quad (1.46)$$

por lo que

$$F(x) = \Phi(s)\kappa(s) \implies \Phi(s) = \frac{F(s)}{\kappa(s)}. \quad (1.47)$$

Deshaciendo la transformada,

$$\varphi(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{\kappa(s)}\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^{xs} \frac{F(s)}{\kappa(s)} ds. \quad (1.48)$$

**1.3.4. Volterra 2<sup>a</sup> clase.**

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt. \quad (1.49)$$

Sólo hay que repetir el proceso anterior:

$$\mathcal{L}[\varphi(x)] = \Phi(s) = \mathcal{L}[f(x)] + \lambda \mathcal{L}\left[\int_0^x \varphi(t)K(x-t)dt\right] = F(s) + \lambda\Phi(s)\kappa(s), \quad (1.50)$$

debido al teorema de convolución.

$$\begin{aligned}\Phi(s) [1 - \lambda\kappa(s)] &= F(s) \implies \\ \Phi(s) &= \frac{F(s)}{1 - \lambda\kappa(s)}.\end{aligned}\tag{1.51}$$

Deshaciendo la transformada,

$$\varphi(x) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(x)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^{sx} \frac{F(s)}{1 - \lambda\kappa(s)} ds.\tag{1.52}$$

### 1.3.5. Ejemplo

Vamos a resolver la ecuación

$$\varphi(x) = x - \lambda \int_0^x (t-x)\varphi(t) dt,\tag{1.53}$$

donde  $f(x) = x \implies F(s) = \mathcal{L}[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \frac{1}{s^2}$ ;  $K(x) = x \implies \kappa(s) = \frac{1}{s^2}$ ,  $\lambda = 1$ . Por lo tanto,

$$\Phi(s) = \frac{1/s^2}{1 - 1/s^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right).\tag{1.54}$$

Buscamos la antitransformada en unas buenas tablas, si no se nos apetece integrar, y

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \sinh(x).\tag{1.55}$$

## 1.4. Núcleo como función generatriz.

En algunas ocasiones el núcleo de las ecuaciones integrales es función generatriz de alguna función especial conocida. Estos casos son para espabilados e individuos con memoria bien desarrollada. Estas ecuaciones son muy peculiares y nunca se puede generalizar el método. Supongamos que una ecuación integral nos aparece con el siguiente aspecto:

$$f(x) = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1-2xt+x^2}} dt, \text{ con } -1 \leq x \leq 1.\tag{1.56}$$

Esta es una ecuación inhomogénea de Fredholm de 1ª clase. Lo normal es no localizar qué es lo que genera al núcleo, por lo que el procedimiento no es nada práctico. Afortunadamente, nuestro ejemplo es fácil (lo hemos escogido así) y

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+x^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(t)x^l, \quad (1.57)$$

combinación de polinomios de Legendre. Automáticamente a uno se le ocurre desarrollar todo en serie de dichos polinomios, en particular

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x). \quad (1.58)$$

Así,

$$f(x) = \int_{-1}^1 dt \sum_{l=0}^{\infty} P_l(t)x^l \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(t). \quad (1.59)$$

Usando la relación de ortogonalidad de las funciones de Legendre,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n a_n \frac{2}{2n+1}. \quad (1.60)$$

Derivando obtenemos que

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} a_n \frac{2}{2n+1} \implies f'(x=0) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n \frac{2}{2n+1}, \quad (1.61)$$

que no depende de  $x$ . Derivando  $n$  veces y tomando el punto  $x=0$ , vemos que

$$f^{(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{2a_n}{2n+1} = f^{(n)}(0) \implies a_n = \frac{2n+1}{2n!} f^{(n)}(0), \quad (1.62)$$

con lo que  $f(0) = \frac{a_0}{2}$  y el término general sería

$$a_n = \frac{2n+1}{2n!} f^{(n)}(0) \quad (1.63)$$

y la solución puede escribirse como

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} P_n(t). \quad (1.64)$$

## 1.5. Teoremas de Fredholm

Son aplicables a las ecuaciones integrales de Fredholm inhomogéneas. Tomemos

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)y(t)dt \quad (1.65)$$

con  $\lambda = 1$ . Introducimos el intervalo  $\Delta x = \Delta t = \frac{b-a}{n}$ . Si  $a = b = \infty$ , no habría forma de aplicar el procedimiento que vamos a contar. Sólo es posible para intervalos finitos.

Llamemos  $K_{pq} = K(a + p\Delta x, a + q\Delta t)$ , donde  $p, q = 1, \dots, n$ . La integral anterior puede expresarse como

$$\sum_{q=1}^n K_{pq}y_q\Delta t, \quad (1.66)$$

ya que, a un  $p$  fijo determinado,  $t$  dependerá de  $q$ . En la expresión anterior  $y_p$  debe ser tal que

$$y(x) = \sum_{p=1}^n y_p. \quad (1.67)$$

Lo mismo podemos hacer con la inhomogeneidad, descomponiéndola en intervalos infinitesimales.

$$f(x) = \sum_{p=1}^n f_p. \quad (1.68)$$

Así, la ecuación puede reescribirse como

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1 + \sum_{q=1}^n K_{1q}y_q\Delta t, \text{ para } p = 1, \\ y_2 &= f_2 + \sum_{q=1}^n K_{2q}y_q\Delta t, \text{ para } p = 2, \\ &\vdots \\ y_n &= f_n + \sum_{q=1}^n K_{nq}y_n\Delta t, \text{ para } p = n, \end{aligned} \quad (1.69)$$

o bien

$$\begin{aligned} y_1 - \sum_{q=1}^n K_{1q}y_q\Delta t &= f_1, \dots p = 1 \\ &\vdots \dots \vdots \\ y_n - \sum_{q=1}^n K_{nq}y_q\Delta t &= f_n, \dots p = n \end{aligned} \quad (1.70)$$

es decir, hemos generado un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas, cuyo discriminante es

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 - K_{11}\Delta t & -K_{12}\Delta t & \cdots & -K_{1n}\Delta t \\ -K_{21}\Delta t & 1 - K_{22}\Delta t & \cdots & -K_{2n}\Delta t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -K_{n1}\Delta t & -K_{n2}\Delta t & \cdots & 1 - K_{nn}\Delta t \end{vmatrix}. \quad (1.71)$$

Este sistema tendrá solución para cualquier valor de las  $f_p$  siempre y cuando haya alguna de ellas no nula. Es decir, sólo habrá solución para la ecuación inhomogénea, donde  $D_n \neq 0$ . En este caso podemos definir el *sistema adjunto* como

$$z_p = f_p^* + \sum_{q=1}^n K_{qp}z_q\Delta t, \quad (1.72)$$

que se diferencia del original por la trasposición de la matriz  $D_n$ . Este sistema también tendrá solución, de forma que

- 1.- Si  $D_n \neq 0$  la solución es única para  $y_n$  y para el traspuesto  $z_n$ .
- 2.- Si  $D_n = 0$ , el sistema es homogéneo y tratable por otro método, o inhomogéneo y difícil de tratar. Vayamos al homogéneo

$$y_p - \sum_{q=1}^n K_{pq}y_q\Delta t = 0. \quad (1.73)$$

En este caso puede haber solución del sistema traspuesto también. Ahora bien, el número de soluciones linealmente independientes, para el sistema homogéneo, es  $n - r$ , siendo  $r$  el rango de la matriz  $D_n$ . Es decir, tiene una base de autoestados de dimensión  $n - r$ . Puede que existan soluciones del inhomogéneo con  $D_n = 0$ , pero sólo para ciertas inhomogeneidades  $f(x)$  muy determinadas. Veámos cuales.

La ecuación adjunta de la homogénea la habíamos definido como

$$z_p - \sum_{q=1}^n K_{qp}z_q\Delta t = 0, \quad (1.74)$$

con una familia de soluciones o espectro  $\vec{z}_p$ . Multiplicando por (4.9) y sumando todas las posibles soluciones,

$$\sum_p y_p z_p - \sum_p \sum_q K_{pq} z_p y_q \Delta t = 0, \quad (1.75)$$

puesto que

$$\begin{aligned} \sum_p y_p z_p - \sum_p z_p \sum_q K_{pq} y_q \Delta t - \sum_p y_p \sum_q K_{qp} z_q \Delta t + \\ \sum_p \left[ \sum_q K_{pq} y_q \Delta t \right] \left[ \sum_q K_{qp} z_q \Delta t \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Como quiera que  $\sum_q K_{qp} z_q \Delta t = z_p$  y  $\sum_q K_{pq} y_q \Delta t = y_p$ , sustituyendo llegamos a la igualdad (4.11).

Por otro lado, la inhomogénea es

$$y_p = \sum_{q=1}^n K_{pq} y_q \Delta t + f_p, \quad (1.77)$$

a la que multiplicaremos por  $z_p$  y sumaremos a todos los  $p$ :

$$\sum_{p=1}^n (y_p - \sum_{q=1}^n K_{pq} y_q \Delta t) z_p = \sum_{p=1}^n f_p z_p. \quad (1.78)$$

Para que el sistema homogéneo e inhomogéneo sean compatibles,

$$y_p - \sum_{q=1}^n K_{pq} y_q \Delta t = 0 \implies \sum_{p=1}^n f_p z_p = 0. \quad (1.79)$$

Es decir, las inhomogeneidades  $f_p$  han de ser ortogonales a las soluciones de la adjunta de la homogénea, siempre que  $D_n = 0$ , para poder tener solución de la inhomogénea. Así, podemos ya enunciar los tres teoremas de Fredholm:

### 1.5.1. Teorema I:

O la ecuación integral lineal de 2ª especie, no homogénea,  $y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt$  tiene solución única ( $D_n \neq 0$ ), para una amplia clase de funciones  $f(x)$ , ó la ecuación integral homogénea tiene, al menos, una solución no trivial.

**1.5.2. Teorema II:**

Si para la ecuación integral dada ocurre la primera alternativa, entonces también se produce para la traspuesta  $z(x) = g(x) + \int_a^b K(t, x)z(t)dt$ .

**1.5.3. Teorema III:**

En el caso de que se produzca la segunda alternativa, la condición necesaria y suficiente para que exista solución de la inhomogénea es que  $\int_a^b z_h(x)f(x)dx = 0$ , es decir, la inhomogeneidad ha de ser ortogonal a la traspuesta de la homogénea. En este caso no existe solución única, pues  $y(x) + \alpha h(x)$  es también solución siempre que  $y(x)$  lo sea de la inhomogénea y  $h(x)$  de la homogénea.

**1.6. Ecuaciones integrales con núcleos separables o degenerados.**

Cuando el núcleo puede escribirse como  $K(x, t) = \sum_{j=1}^n N_j(x)M_j(t)$ , la integral puede reemplazarse por un sistema de ecuaciones algebraicas. Para ello  $n$  ha de ser finito. Partamos de una ecuación integral genérica

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt, \quad (1.80)$$

cuyo núcleo es separable en polinomios o ecuaciones trascendentales, tal como pueda ser  $\sin(x - t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t$ . Siempre existen métodos aproximados para reducir cualquier función a una de variables separadas. En el caso general,

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n N_j(x)M_j(t)y(t)dt \\ &= f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n N_j(x) \int_a^b M_j(t)y(t)dt \\ &= f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n N_j(x)y_j, \end{aligned} \quad (1.81)$$

puesto que  $y_j = \int_a^b M_j(t)y(t)dt$  es una constante. Premultiplicamos por  $M_i(x)$  e integramos entre  $a$  y  $b$ :

$$\int_a^b M_i(x)y(x)dx = y_i = \int_a^b M_i(x)f(x)dx + \lambda \sum_{j=1}^n \int_a^b M_i(x)N_j(x)y_j dx, \quad (1.82)$$

que podemos escribir en forma vectorial como

$$\begin{aligned} y_i &= f_i + \lambda \sum_{j=1}^n y_j a_{ij} \implies \\ \vec{y} &= (\mathcal{I} - \lambda \mathcal{A})^{-1} \vec{f}, \end{aligned} \quad (1.83)$$

siendo  $\mathcal{I}$  la matriz identidad  $n \times n$ , y la matriz  $\mathcal{A}$  es conocida.

Evidentemente, la condición necesaria y suficiente para que el sistema tenga solución (no trivial) y que ésta sea única es que

$$\det(\mathcal{I} - \lambda \mathcal{A}) \neq 0. \quad (1.84)$$

Esta condición se cumple siempre para las ecuaciones de Fredholm, siempre y cuando la  $\lambda$  no coincida con ningún autovalor de la ecuación homogénea. En el caso en que  $\det(\mathcal{I} - \lambda \mathcal{A}) = 0$ , la ecuación homogénea  $(\mathcal{I} - \lambda \mathcal{A})\vec{y} = 0$  tiene solución, aunque no la tenga la completa.

Consideremos una ecuación homogénea y su traspuesta:

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \text{ con } K(x,t) = \sum_{j=1}^n N_j(x)M_j(t), \\ z(x) &= \lambda \int_a^b K(t,x)z(t)dt, \text{ con } K(t,x) = \sum_{j=1}^n N_j(t)M_j(x), \end{aligned} \quad (1.85)$$

donde sólo hemos traspuesto el núcleo. Para  $z(x)$  la matriz  $\mathcal{A}$  quedaría traspuesta. Es decir,  $(\mathcal{I} - \lambda_h \mathcal{A}^T) = (\mathcal{I} - \lambda_h \mathcal{A})^T$  y  $\det(\mathcal{I} - \lambda_h \mathcal{A})^T = \det(\mathcal{I} - \lambda_h \mathcal{A}) = 0$ , por lo que esta ecuación homogénea traspuesta tendrá, al menos, una solución. Creamos el vector

$$z_i = \int_a^b z(t)N_i(t)dt.$$

Si el determinante  $\det(\mathcal{I} - \lambda_h \mathcal{A})$  es nulo pueden existir ciertas funciones  $f(x)$  determinadas de forma que también tenga solución la ecuación inhomogénea,



1.6. ECUACIONES INTEGRALES CON NÚCLEOS SEPARABLES O DEGENERADOS.25

por aplicación inmediata del 2º teorema de Fredholm. La condición para ello es que  $\sum_{i=1}^n z_i f_i = 0$ . Con esto

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{i=1}^n \int_a^b N_i(t)z(t)dt \int_a^b M_i(x)f(x)dx = \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_a^b f(x) \left[ \int_a^b N_i(t)z(t)M_i(x)dt \right] dx \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_a^b f(x) \left[ \int_a^b K(x,t)z(t)dt \right] dx \\
 &= \frac{1}{\lambda} \int_a^b f(x)z(x)dx \\
 &\implies \int_a^b f(x)z(x)dx = 0. \tag{1.86}
 \end{aligned}$$

condición para que la inhomogénea tenga solución, Es decir,  $\vec{f}$  ha de ser ortogonal a  $\vec{z}$ .

**Ejemplo:**

Tengamos la ecuación homogénea de Fredholm

$$y(x) = \lambda \int_{-1}^{+1} (x+t)y(t)dt, \tag{1.87}$$

con

$$\begin{aligned}
 N_1(x) &= x, & N_2(x) &= 1, \\
 M_1(t) &= 1, & M_2(t) &= t.
 \end{aligned} \tag{1.88}$$

La matriz  $\mathcal{A}$  tendrá por elementos a

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \int_{-1}^{+1} M_1(x)N_1(x)dx = \int_{-1}^{+1} xdx = 0, \\
 a_{12} &= \int_{-1}^{+1} M_1(x)N_2(x)dx = \int_{-1}^{+1} dx = 2, \\
 a_{21} &= \int_{-1}^{+1} M_2(x)N_1(x)dx = \int_{-1}^{+1} x^2dx = 2/3, \\
 a_{22} &= \int_{-1}^{+1} M_2(x)N_2(x)dx = \int_{-1}^{+1} xdx = 0,
 \end{aligned} \tag{1.89}$$

y, por tanto,

$$(\mathcal{I} - \lambda_h \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & -2\lambda_h \\ -\frac{2}{3}\lambda_h & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.90)$$

cuyo determinante es  $\det(\mathcal{I} - \lambda_h \mathcal{A}) = 1 - \frac{4}{3}\lambda_h^2$ . Para la ecuación homogénea que tenemos,  $\det(\mathcal{I} - \lambda_h \mathcal{A}) = 0$  nos determina sus autovalores. Así,  $1 - \frac{4}{3}\lambda_h^2 = 0 \implies \lambda_h = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Con los autovalores en la mano determinamos los autovectores de la homogénea que, para  $\lambda_{h1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , sería

$$\begin{bmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.91)$$

que nos conduce a que  $y_1 = \sqrt{3}y_2 \implies y_2 = C_1$ ,  $y_1 = \sqrt{3}C_1$ . El autovector sería

$$y_{1h}(x) = \sum y_i N_i(x) = C_1(\sqrt{3}x + 1) \quad (1.92)$$

Repitiendo el proceso para el otro autovalor  $\lambda_{h2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , obtenemos el otro autovalor

$$y_{2h}(x) = C_2(-\sqrt{3}x + 1). \quad (1.93)$$

En general, y para problemas de física, resulta conveniente normalizar estos autovalores, determinando las constantes  $C_i$ . Cualquier combinación  $y(x) = \alpha y_{1h}(x) + \beta y_{2h}(x)$  es solución del problema.

Vamos a completar el problema resolviendo una inhomogénea cuya parte homogénea sea la anterior:

$$y(x) = f(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^{+1} (x+t)y(t)dt. \quad (1.94)$$

En principio dejamos libre la inhomogeneidad, pero hemos de tener presente que la constante  $\lambda$  coincide con uno de los autovalores de la homogénea. Esta circunstancia nos va a condicionar  $f(x)$ . Para que la inhomogénea tenga solución  $\int_a^b f(x)z_i(x)dx = 0$ , correspondiendo la  $z_i(x)$  a la autofunción cuyo autovalor es el problemático. Vamos a calcular las autofunciones para la matriz  $\mathcal{A}^T$ . En nuestro caso

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^T = a_{ji} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} &\implies (\mathcal{I} - \lambda_h \mathcal{A}^T) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{3}\lambda & \\ & -2\lambda \end{bmatrix} \\ &\implies 1 - \frac{4}{3}\lambda^2 = 0 \implies \begin{cases} z_+ = y_1 = 1 + \sqrt{3}x \\ z_- = y_2 = 1 - \sqrt{3}x \end{cases}. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Este resultado era previsible dada la simetría del núcleo. Si se cumple que

$$\int_{-1}^1 f(x) (1 + \sqrt{3}x) dx = 0,$$

el problema inhomogéneo tiene solución. Las inhomogeneidades más sencillas serán del tipo  $f(x) = ax^2 + b$ , con  $a = -3b$ . Un caso podría ser  $f(x) = 3x^2 - 1$ . Esta función es ortonormal a las soluciones de la traspuesta de la homogénea.

Resolvamos

$$y(x) = 3x^2 - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^{+1} (x+t)y(t)dt. \quad (1.96)$$

Recordemos que, para  $\lambda_h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $y_h(x) = C_1(1 + \sqrt{3}x)$ , y que

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^2 N_j(x)y_j.$$

Habría que calcular el valor de las  $y_j$  a través de la ecuación matricial de la inhomogénea

$$\vec{y} = (\mathcal{I} - \lambda\mathcal{A})^{-1} \vec{f}.$$

Es decir,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{3} & \\ & -\frac{\sqrt{3}}{2}1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

donde  $f_i = \int_{-1}^{+1} f(x)M_i(x)dx$ . En nuestro caso  $f_1 = \int_{-1}^{+1} (3x^2 - 1) dx = x^3 - x|_{-1}^1 = 0$  y  $f_2 = \int_{-1}^{+1} (3x^2 - 1) x dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2|_{-1}^1 = 0$ . Es decir,  $y_i$  quedarían como dos constantes indeterminadas que llamaremos  $a$  y  $b = \sqrt{3}a$ . Por lo tanto,

$$y(x) = (3x^2 - 1) + \frac{\sqrt{3}}{2} (ax + \sqrt{3}a) = (3x^2 - 1) + \frac{\sqrt{3}}{2} a(x + \sqrt{3}).$$

## 1.7. Series de Neumann. Núcleos pequeños

El método de Neumann es un procedimiento iterativo que sólo es válido para núcleos pequeños. Partimos de una ecuación inhomogénea de Fredholm de 2ª clase

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt,$$

y el primer paso consiste en reemplazar la incógnita del integrando por la inhomogeneidad,  $y_0(x) = f(x) \implies$

$$y_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt. \quad (1.97)$$

Volvemos a repetir el proceso,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) [y_1(t)] dt \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \left[ f(t) + \lambda \int_a^b K(t, t_1) f(t_1) dt_1 \right] dt \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b dt_1 \int_a^b dt_2 K(x, t_1) K(t_1, t_2) f(t_2) \\ &= u_0(x) + u_1(x) + u_2(x), \end{aligned} \quad (1.98)$$

con lo que

$$\begin{aligned} y_0(x) &= u_0(x) = f(x), \\ y_1(x) &= u_0(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt = u_0(x) + u_1(x), \\ y_2(x) &= u_0(x) + u_1(x) + u_2(x), \\ y_n(x) &= u_0(x) + \cdots + u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \end{aligned}$$

Caso de que exista solución, y esta sea única, hay que demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$ , donde  $y(x)$  es la solución de la ecuación integral. Es decir,  $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ . Si no de hubieran incluido las  $\lambda$ 's en los desarrollos podríamos haber escrito que  $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ . Aplicando el teorema de convergencia de Cauchy,

$$|\lambda^n u_n(x)| = |\lambda|^n |M|^n |b - a|^n, \quad (1.99)$$

siendo  $M$  el máximo valor que alcanza  $K(x, t)$  en el recinto acotado  $[a, b]$ . Es decir,  $|K(x, t)| < M$ . Podemos hacer lo mismo para el término de orden  $n + 1$ . Dividiéndolo por el de orden  $n$ ,

$$|\lambda| |M| |b - a| < 1, \quad (1.100)$$

que es la *condición suficiente* para que converja la serie. La condición necesaria puede resumirse en que, si utilizamos la ecuación homogénea asociada,  $|\lambda| < |\lambda_e|$ , siendo  $\lambda_e$  el menor de los autovalores de la homogénea.

### 1.7.1. Ejemplo

$$y(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)y(t)dt.$$

Tomamos

$$\begin{aligned} y_0(x) &= x, \\ y_1(x) &= x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t-x)t dt = x + \frac{1}{3}, \\ y_2(x) &= x + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dt_1 \int_{-1}^1 dt_2 (t_1-x)(t_1-t_2)t_2 = \end{aligned} \quad (1.101)$$

$$\begin{aligned} &x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x, \\ y_3(x) &= x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}. \end{aligned} \quad (1.102)$$

y así sucesivamente. Por recurrencia se puede observar (por un muy buen observador, por lo menos de Naciones Unidas) cómo va a ser el término general de la serie:

$$y(x) = x + \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{1}{3^j} - x \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{1}{3^j}, \quad (1.103)$$

que son dos progresiones geométricas. Nuestra solución sería

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = x + \frac{1/3}{4/3} - x \frac{1/3}{4/3} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}. \quad (1.104)$$

En este caso la solución es exacta, puesto que hemos sido tan listos que hemos localizado una serie buena y se cumple que  $\max |K(x, t)| = 2$ ,  $b - a = 2$ ,  $\lambda = 1/2$  con lo que  $|\lambda| |M| |b - a| = 2$  que es mayor que 1, no cumpliéndose la condición suficiente. Pero existe solución ya que los autovalores de la homogénea son  $\lambda_h = \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Como  $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ , se cumple la condición necesaria y, evidentemente, hay solución.

## 1.8. Método de la resolvente de Fredholm

Toda ecuación integral de Fredholm

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)y(t)dt \quad (1.105)$$

puede reescribirse como

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x, t)\lambda^n f(t)dt, \quad (1.106)$$

siendo

$$\begin{aligned} K_1(x, t) &= k(x, t), \\ K_2(x, t) &= \int_a^b k(x, t)k(t_1, t)dt_1, \\ &\vdots \\ K_n(x, t) &= \int_a^b k(x, t)k(t_1, t) \cdots k(t_n, t)dt_1 \cdots dt_n, \end{aligned} \quad (1.107)$$

que es el mismo desarrollo que se ha hecho ya para las series de Neumann, y con las mismas condiciones. También existe la posibilidad de escribir

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda)f(t)dt, \quad (1.108)$$

donde  $R(x, t)$  recibe el nombre de **resolvente**, siendo

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x, t)\lambda^n, \quad (1.109)$$

y el método de Neuman no sería más que la aplicación paso a paso de este método. Resumiendo, se descompone la integral en una serie de sumandos, siendo el número de éstos infinito. Posteriormente se calcula el límite de la suma.

Después de la aplicación del método de Fredholm se llega a expresiones tales como

$$R(x, t, \lambda) = \frac{D(x, t, \lambda)}{D(\lambda)}. \quad (1.110)$$

Calculando los ceros de  $D(\lambda)$  conoceremos las singularidades de  $R(x, t, \lambda)$ . Este método es más poderoso que el de Neumann, pues sirve para todo el espacio excepto las singularidades. Tiene el inconveniente de ser enormemente pesado y tedioso. Veámoslo:

$$\begin{aligned}
 D(x, t, \lambda) &= k(x, t) - \lambda \int_a^b dz \begin{vmatrix} k(x, t) & k(x, z) \\ k(z, t) & k(z, z) \end{vmatrix} + \\
 &+ \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b dz dz' \begin{vmatrix} k(x, t) & k(x, z) & k(x, z') \\ k(z, t) & k(z, z) & k(z, z') \\ k(z', t) & k(z', z) & k(z', z') \end{vmatrix} - \dots, \\
 D(\lambda) &= 1 - \lambda \int_a^b k(z, z) dz + \\
 &+ \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} k(z, z) & k(z, z') \\ k(z, z') & k(z', z') \end{vmatrix} dz dz' - \dots = \\
 &1 - \lambda A.
 \end{aligned}$$

Como vemos, se gana un orden de potencia respecto al método de Neumann, y tiene la ventaja de que puede verse su estructura analítica, así como la solución, sin tener que calcularla previamente ni totalmente.

### 1.8.1. Ejemplo

$$y(x) = x + \lambda \int_0^1 t(x+t)y(t)dt. \tag{1.111}$$

Hacemos el desarrollo de Fredholm hasta orden 3 (hasta  $\lambda^3$ ). En este caso da la casualidad de que el resultado es exacto para ese orden.

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda)f(t)dt, \text{ con } k(x, t) = t(x+t). \tag{1.112}$$

La resolvente sería  $R(x, t, \lambda) = \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)}$ , donde

$$D(x, t, \lambda) = k(x, t) - \lambda \int_0^1 \begin{vmatrix} \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{vmatrix} dz + \frac{\lambda^2}{2!} \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{vmatrix} dz dz' + \dots, \tag{1.113}$$

de donde

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} k(x, t) & k(x, z) \\ k(z, t) & k(z, z) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} t(x+t) & z(x+z) \\ t(z+t) & z(z+z) \end{vmatrix} = \\ &= -z^3t + z^2t(x+t) - zt^2x \implies (1.114) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 [-z^3t + z^2t(x+t) - zt^2x] dz = -\frac{1}{4}t + \frac{1}{3}t(x+t) - \frac{1}{2}t^2x.$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} k(x, t) & k(x, z) & k(x, z') \\ k(z, t) & k(z, z) & k(z, z') \\ k(z', t) & k(z', z) & k(z', z') \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} t(x+t) & z(x+z) & z'(x+z') \\ t(z+t) & z(z+z) & z(z+z') \\ t(z'+t) & z(z+z') & z'(z'+z') \end{vmatrix} = \\ &= 0 \\ \implies D(x, t, \lambda) &= t(x+t) + \lambda \left( \frac{t^2x}{2} - \frac{t(x+t)}{3} + \frac{t}{4} \right) + 0 \quad (1.115) \end{aligned}$$

Por otra parte,  $D(\lambda)$ , que ha de coincidir con el discriminante del sistema, es

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= 1 - \lambda \int_0^1 2z^2 dz + \frac{\lambda^2}{2!} \int_0^1 \int_0^1 [4z^2 z'^2 - z'^2(z+z')] dz dz' = \\ &= 1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{72}\lambda^2 + 0 \quad (1.116) \end{aligned}$$

Por tanto, la resolvente será

$$R(x, t, \lambda) = \frac{D(x, t, \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{t(x+t) + \lambda \left( \frac{t^2x}{2} - \frac{t(x+t)}{3} + \frac{t}{4} \right)}{1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{72}\lambda^2} \quad (1.117)$$

Con ella encontramos que

$$\frac{1}{D(\lambda)} \int_0^1 f(t) D(x, t, \lambda) dt = \quad (1.118)$$

$$\frac{1}{D(\lambda)} \int_0^1 \left\{ t^2(x+t) + \lambda \left[ \frac{t^3x}{2} - \frac{t^2(x+t)}{3} + \frac{t^2}{4} \right] \right\} dt \implies \quad (1.119)$$

$$y(x) = x + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \left( \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{72} \right) x + \frac{\lambda}{4D(\lambda)}, \quad (1.120)$$

donde ya hemos sustituido la integral. Esta es la solución hasta orden  $\lambda^2$ .



Utilizando el método de las series de Neumann el resultado sería:

$$y(x) = x \left( 1 + \frac{\lambda}{3} + \frac{17\lambda^2}{72} \right) + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda^2}{16} + \dots \quad (1.121)$$

Dado que la ecuación es de núcleos separables, podemos resolverla exactamente a modo de comparación. Así,

$$\left. \begin{array}{l} N_1(x) = x \quad M_1(t) = t \\ N_2(x) = 1 \quad M_2(t) = t^2 \end{array} \right\} \implies A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \quad (1.122)$$

Por tanto, podemos calcular el discriminante y comprobar si se satisfacen los teoremas de Fredholm:

$$D(\lambda) = |I - \lambda A| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda/3 & -\lambda/2 \\ -\lambda/4 & 1 - \lambda/3 \end{vmatrix} = 1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{72}\lambda^2. \quad (1.123)$$

Las soluciones estarán ligadas con los valores de  $\lambda$  que se obtengan de anular  $D(\lambda)$ . Es decir,  $\lambda_{\pm} = \pm 18\sqrt{2} - 24$ . Para calcular la solución exacta completa, dado que  $f(x) = x$ , obtenemos

$$\begin{aligned} f_1 &= \int_0^1 f(x)M_1(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \\ f_2 &= \int_0^1 f(x)M_2(x)dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (1.124)$$

Así,

$$(1 - \lambda A)^{-1} = \frac{1}{D(\lambda)} \begin{bmatrix} 1 - \lambda/3 & \lambda/2 \\ \lambda/4 & 1 - \lambda/3 \end{bmatrix}, \quad (1.125)$$

de donde

$$\begin{aligned} \vec{y} &= (1 - \lambda A)^{-1} \vec{f} = \frac{1}{D(\lambda)} \begin{bmatrix} 1 - \lambda/3 & \lambda/2 \\ \lambda/4 & 1 - \lambda/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{D(\lambda)} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\lambda + \frac{1}{8}\lambda \\ \frac{1}{12}\lambda + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\lambda \end{bmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{D(\lambda)} \left( \frac{1}{3} - \frac{\lambda}{72} \right) \\ y_2 = \frac{1/4}{D(\lambda)} \end{array} \right\} \implies \\ & y(x) = x + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \left[ \left( \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{72} \right) x + \frac{1}{4} \right]. \end{aligned} \quad (1.126)$$

Agrupando términos, podemos escribir

$$y(x) = x \left[ 1 + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \left( \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{72} \right) \right] + \frac{\lambda}{4D(\lambda)}, \quad (1.127)$$

resultado idéntico al obtenido por el método de la resolvente de Fredholm. Es decir, en este caso el método de Fredholm tiene la máxima potencia siendo exacto. El anterior resultado puede reescribirse en serie de potencias de  $\lambda$ , de modo que

$$\begin{aligned} y(x) &= x + \frac{\lambda}{1 - \frac{2\lambda}{3} - \frac{\lambda^2}{72}} \left( \frac{x}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{\frac{\lambda^2}{72}x}{1 - \frac{2\lambda}{3} - \frac{\lambda^2}{72}} = \\ &= x + \lambda \left( 1 + \frac{2}{3}\lambda \right) \left( \frac{x}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{\lambda^2}{72}x + \dots \end{aligned} \quad (1.128)$$

donde hemos eliminado potencias superiores a  $\lambda^2$  en los desarrollos en serie de los denominadores. Agrupando,

$$y(x) = x \left( 1 + \frac{\lambda}{3} + \frac{17\lambda^2}{72} \right) + \frac{\lambda^2}{2} + \dots, \quad (1.129)$$

cuyo principio se aproxima bastante al resultado de las series de Neumann.

## 1.9. Método de Hilbert-Schmidt. Núcleos simétricos

Este método es particularmente útil cuando los núcleos son **simétricos**, es decir,  $k(x, t) = k(t, x)$  ó **casi-simétricos**, como es  $k(x, t) = S(x, t)\rho(t)$ , donde  $S(x, t)$  es simétrico. En Mecánica Cuántica, por ser los operadores autoadjuntos, este método es general, ya que la extensión al campo complejo implica que los núcleos han de ser autoadjuntos en lugar de simétricos.

Los núcleos casi simétricos pueden simetrizarse. Sea la ecuación integral

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b s(x, t)\rho(t)\varphi(t)dt. \quad (1.130)$$

Creemos una función  $\psi(x) = \sqrt{\rho(x)}\varphi(x) \implies \varphi(x) = \frac{\psi(x)}{\sqrt{\rho(x)}}$ , con lo que

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{\rho(x)}f(x) + \lambda\sqrt{\rho(x)} \int_a^b s(x, t)\rho(t) \frac{\psi(x, t)}{\sqrt{\rho(t)}} dt \\ &= \sqrt{\rho(x)}f(x) + \lambda \int_a^b s(x, t)\sqrt{\rho(x)}\sqrt{\rho(t)}\psi(x, t)dt, \end{aligned} \quad (1.131)$$

que ya es simétrica, con la nueva inhomogenidad  $g(x) = \sqrt{\rho(x)}f(x)$  y el nuevo núcleo simétrico  $G(x, t) = s(x, t)\sqrt{\rho(x)}\sqrt{\rho(t)}$

### 1.9.1. Norma de una función

La calcularemos de la forma habitual en un intervalo finito y cerrado, con el núcleo continuo y acotado. En realidad se puede generalizar a intervalos infinitos, y a cualquier número de variables. Partimos de  $f(x)$  definida en el intervalo  $(a, b)$ .

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx} \quad (1.132)$$

Una vez definida la norma, pasamos a definir la **distancia** entre dos funciones como

$$\bar{d}(f_1, f_2) = \sqrt{\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))^2 dx} \quad (1.133)$$

Su cuadrado es la **distancia cuadrática media**, aunque algunos textos la definen como  $D = \sup_{(a,b)} |f_1(x) - f_2(x)|$ .

### 1.9.2. Convergencia de funciones

La serie o conjunto de funciones  $\{f_n(x)\}$  converge a  $f(x)$  si el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{d}[f(x), f_n(x)] = 0$ . Por ejemplo, en el intervalo  $(0, 1)$ , la función  $e^{-kx} \rightarrow 0$ . Pero hete aquí que  $\int_0^1 e^{-kx} dx = \frac{-e^{-kx}}{k} \Big|_0^1 = \frac{-e^{-k}}{k} + \frac{1}{k}$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1-e^{-kx}}{k} = 0$ . Hasta ahora bien. Pero según algunos textos (Petrovski), para  $x$  muy pequeños, si  $k$  es muy grande pueden ocurrir graves accidentes como  $\frac{1-e^{-1000/1000}}{1000} = \frac{1-1/e}{1000} \neq 0$  (¿dónde está el problema?). No logro entender la argumentación matemática pues, por muy pequeño que sea  $x$  y muy grande que sea  $k$ , el resultado va a tender a cero siempre. Dicen que, por esta razón, no vale la última definición de distancia arriba dada. Juzguen ustedes mismos.

### 1.9.3. Producto escalar de dos funciones

Se define como

$$(f_1, f_2) = \langle f_1 | f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx, \quad (1.134)$$

ó, para el caso de complejos,

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int_a^b f_1^*(x) f_2(x) dx, \quad (1.135)$$

A través de esta definición puede comprobarse la desigualdad triangular

$$\bar{d}(f_1, f_2) + \bar{d}(f_2, f_3) \geq \bar{d}(f_1, f_3), \quad (1.136)$$

y la desigualdad de Bunyakovsky

$$(f \bullet \varphi) \leq \|f\| \|\varphi\|. \quad (1.137)$$

El **coseno** entre dos funciones se define por

$$\cos(f_1, f_2) = \frac{(f_1, f_2)}{\|f_1\| \|f_2\|} \quad (1.138)$$

#### 1.9.4. Conjunto de funciones ortonormales

$\{\varphi_n\}$  es un conjunto de funciones ortonormales si  $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$ ,  $\forall \varphi_i \in \{\varphi_n\}$ .

#### 1.9.5. Coeficientes de Fourier de $f(x)$

Son los reales tales que

$$f_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = (f(x), \varphi_k(x)) = \langle f(x) | \varphi_k(x) \rangle \quad (1.139)$$

#### 1.9.6. Teorema

Si  $f(x)$  es una función normada y  $c_1, c_2, \dots, c_m$  son los coeficientes que minimizan a  $\bar{d}^2[c_1\varphi_1 + \dots + c_m\varphi_m, f(x)]$ , con  $\{\varphi_m(x)\}$  conjunto de funciones ortonormales, las  $c_i$  son necesariamente los coeficientes de Fourier de  $f(x)$ . Veámoslo:

Partimos de que la distancia entre funciones se definía como

$$\begin{aligned}
 \bar{d}^2 [c_1\varphi_1 + \cdots + c_m\varphi_m, f(x)] &= \\
 \int_a^b \left[ \sum_{k=1}^m c_k\varphi_k(x) - f(x) \right]^2 dx &= \\
 \int_a^b f^2(x)dx - 2 \sum_{k=1}^m c_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx + \\
 + \sum_{k'=1}^m \sum_{k=1}^m c_k c_{k'} \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_{k'}(x)dx &= \\
 \int_a^b f^2(x)dx + \sum_{k=1}^m c_k^2 - 2 \sum_{k=1}^m c_k f_k &= \\
 \int_a^b f^2(x)dx + \\
 + \sum_{k=1}^m (c_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^m f_k^2 > 0, & \quad (1.140)
 \end{aligned}$$

ya que la distancia siempre es positiva. Dado que existen tanto  $\int_a^b f^2(x)dx$  como  $\sum_{k=1}^m f_k^2$  y son valores calculables, para que la distancia sea mínima, obligatoriamente

$$c_k = f_k. \quad (1.141)$$

De esta relación puede deducirse la **desigualdad de Bessel**  $\bar{d}^2 \geq 0$ . El valor mínimo de la distancia será, por tanto,

$$\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^m f_k^2, \quad (1.142)$$

con lo que la desigualdad de Bessel puede reescribirse como  $\int_a^b f^2(x)dx \geq \sum_{k=1}^m f_k^2$ . Caso de producirse la igualdad, esta es conocida como **igualdad de Parseval**.

Una sucesión se dice que es **cerrada** si se verifica la igualdad de Parseval. Un sistema se llama **completo** cuando no existe una función ortonormal a todas las demás, simultáneamente, de la serie:

$$\forall \varphi_k(x) \in \{\varphi_m(x)\}, \text{ con } k = 1, \dots, m \implies \nexists f / (f, \varphi_k(x)) = 0 \quad (1.143)$$

### 1.9.7. Teorema:

Todo sistema cerrado es completo.

Si suponemos un sistema cerrado pero no completo, existirá una  $\psi$  tal que  $(\psi\varphi_k) = 0$ . Esto indica que todos los coeficientes de Fourier de  $\psi$  son nulos, ya que la igualdad es para todo  $k$ . Es decir,  $\sum_{k=1}^m f_k^2 = 0$ , ya que lo son todos los  $f_k$ . Usando la igualdad de Parseval,

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{k=1}^m f_k^2 = 0 = \|\psi\|, \quad (1.144)$$

lo cual es imposible, ya que si  $\psi$  tiene norma nula contradecimos el enunciado de partida. La argumentación inversa sólo es demostrable y cierta en sistemas acotados.

### 1.9.8. Aplicación a las ecuaciones integrales

#### Ecuaciones homogéneas

Sea  $k(x, t)$  un núcleo función de dos variables, con un número finito de discontinuidades o totalmente continuo para ambas variables, en un sistema cerrado. Si  $\lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = \varphi(x)$ , entonces,  $\varphi(t)$  es **autofunción** de la ecuación y  $\lambda$  es un **autovalor**.

Para núcleos simétricos y continuos necesariamente han de existir, al menos, un autovalor  $\lambda$  y una autofunción  $\varphi(x)$  distintos de los triviales. Es decir, las ecuaciones de Fredholm tienen siempre, como mínimo, un autovalor.

#### Teorema

Si existiesen dos autovalores distintos de una ecuación integral, sus autofunciones asociadas son ortogonales.

Sean  $\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b k(x, t)\varphi_i(t)dt$  y  $\varphi_j(x) = \lambda_j \int_a^b k(x, t)\varphi_j(t)dt$  dos autofunciones de la misma ecuación. Multiplicamos la primera por  $\lambda_j\varphi_j(x)$  y la segunda por  $\lambda_i\varphi_i(x)$  e integramos al intervalo de definición:

$$\begin{aligned} \lambda_j \int_a^b \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx &= \lambda_j\lambda_i \int_a^b \int_a^b k(x, t)\varphi_j(x)\varphi_i(t)dxdt, \\ \lambda_i \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx &= \lambda_j\lambda_i \int_a^b \int_a^b k(x, t)\varphi_i(x)\varphi_j(t)dxdt. \end{aligned} \quad (1.145)$$

En el segundo caso, dado que el núcleo es simétrico, podemos intercambiar las variables  $x \leftrightarrow t$  sin alterar el resultado. Restando ambas igualdades,

$$(\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b \varphi_j(x)\varphi_i(x)dx = \lambda_i\lambda_j \int_a^b \int_a^b k(x,t) [\varphi_j(x)\varphi_i(t) - \varphi_i(t)\varphi_j(x)] dxdt = 0. \quad (1.146)$$

Dado que  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , evidentemente  $\varphi_j(x)$  es ortogonal a  $\varphi_i(x)$ .

**Todos los autovalores son reales.**

Pueden haber autovalores correspondientes a varias autofunciones linealmente independientes. Es decir, a un sólo autovalor ligamos varias autofunciones. Este es el caso de **degeneración**. Estas funciones pueden que no sean ortogonales, pero se les puede ortogonalizar. Para ello suele utilizarse el método de Schmidt.

**Método de ortogonalización de Schmidt**

Tengamos una serie  $u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x)$  de autofunciones correspondientes al mismo autovalor  $\lambda$ . Llamamos  $\psi_0(x) = u_0(x)$  y normalizamos como  $\varphi_0(x) = \frac{\psi_0(x)}{\|\psi_0(x)\|}$ . A continuación generamos a  $\psi_1(x) = u_1(x) + a_{10}\varphi_0(x)$ . Como  $\psi_0(x)$  ha de ser ortogonal a  $\psi_1(x) \implies (\psi_1(x), \varphi_0(x)) = 0 \implies (u_1(x), \varphi_0(x)) + a_{10}(\varphi_0(x), \varphi_0(x)) = 0$  y, por tanto,

$$a_{10} = -\frac{(u_1, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = -(u_1, \varphi_0) = -\int_a^b u_1(x)\varphi_0(x)dx. \quad (1.147)$$

Creamos  $\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1(x)\|}$ , continuando con el proceso. En general,

$$\psi_i(x) = u_i(x) + \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij}\varphi_j(x), \quad (1.148)$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \frac{\psi_i(x)}{\|\psi_i(x)\|}, \\ a_{ij} &= -\int_a^b u_i(x)\varphi_j(x)dx. \end{aligned} \quad (1.149)$$

### 1.9.9. Teorema de Hilbert-Schmidt

Toda función  $f(x)$  que sea intrínsecamente representable por una función continua normada (de cuadrado integrable) en el intervalo  $(a, b)$ , es decir,

$$f(x) = \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt,$$

siendo  $\varphi(t)$  arbitraria pero continua, y siendo finito el conjunto de estas funciones  $f(x)$ , todas ellas son desarrollables en serie por el conjunto de funciones propias  $\varphi_n(x) = \lambda_n \int_a^b k(x, t)\varphi_n(t)dt$ .

Además, las serie converge uniformemente. Es decir,  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x)$  y  $k(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$  con  $a_n = a_n(x)$ . El teorema puede enunciarse de forma alternativa como: 'Si  $f(x)$  puede escribirse en la forma  $f(x) = \int k(x, t)\varphi(t)dt$ , entonces  $f(x)$  puede también representarse por su serie de Fourier respecto al sistema  $\{\varphi_n(x)\}$  de autofunciones de  $k(x, t)$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x)$ , con  $b_n = \int f(x)\varphi_n(x)dx$ '.

### 1.9.10. Teorema del desarrollo del núcleo

Todo núcleo simétrico puede desarrollarse como

$$k(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(t)}{\lambda_i} \quad (1.150)$$

siempre que este núcleo sea continuo en el intervalo  $(a, b)$ . Si el desarrollo es **finito**, los núcleos son **separables**. El anterior desarrollo no es necesariamente uniformemente convergente (sí su media), pero su integral sí converge a cero  $\int k(x, t)dt = 0$ . En el caso de que el núcleo sea separable,  $k(x, t) = k_1(x)k_2(t)$ , el teorema es rigurosamente cierto (extraño teorema que no es rigurosamente cierto para un número infinito de casos), y  $k_1(x)$  es autovalor del sistema.

Dado que  $k(x, t)$  es desarrollable por

$$k(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t), \quad (1.151)$$



con  $a_n = a_n(x)$ , podemos sustituir en la ecuación integral homogénea original:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \varphi_n(t) \varphi(t) dt = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \int_a^b \varphi_n(t) \varphi(t) dt. \quad (1.152)$$

Utilizando la ortogonalidad de las funciones  $\varphi_n(t)$ , y particularizando a una cualquiera de ellas

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \lambda_i \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \int_a^b \varphi_n(t) \varphi_i(t) dt = \lambda_i a_i(x) \\ &\implies a_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}. \end{aligned} \quad (1.153)$$

Por tanto, podemos reescribir el núcleo como

$$k(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \frac{\varphi_i(t)}{\lambda_i}, \quad (1.154)$$

donde el cero no puede ser autovalor.

Es posible que no exista el desarrollo  $k(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_n(x) \varphi_n(t)$ . Por ejemplo, en el caso patológico  $\varphi(x) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-xt} \varphi(t) dt$ .

### 1.9.11. Método de Hilbert-Schmidt: Ec. inhomogéneas

Partimos de que ya sabemos resolver la homogénea con alguno de los métodos analizados. La inhomogénea será

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt \quad (1.155)$$

Tomando como base las soluciones (autofunciones)  $\varphi_n(x)$  de la homogénea, desarrollamos en serie inhomogeneidad y función incógnita:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \\ f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x), \end{aligned} \quad (1.156)$$

y sustituimos en la ecuación integral inhomogénea completa, usando el teorema del desarrollo del núcleo:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n},\end{aligned}\quad (1.157)$$

ya que la homogénea es, para un autovalor  $\lambda_n$ ,

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int_a^b k(x,t) \varphi_n(t) dt. \quad (1.158)$$

Si premultiplicamos por una  $\varphi_i(x)$  e integramos,

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi_i(x) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) dx &= \int_a^b \varphi_i(x) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) dx + \lambda \int_a^b \varphi_i(x) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} dx \\ \implies a_i &= b_i + \lambda \frac{a_i}{\lambda_i} \implies a_i = \frac{b_i}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}} = \frac{\lambda_i b_i}{\lambda_i - \lambda} = b_i \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda} \right).\end{aligned}\quad (1.159)$$

Es decir, si conocemos las  $b_i$  y las  $\lambda_i$  podemos calcular los coeficientes  $a_i$ . Dado que  $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ ,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n b_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda b_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(x) \implies \\ \varphi(x) &= f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dt}{\lambda_n - \lambda},\end{aligned}\quad (1.160)$$

ya que, si  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) \implies \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_n(x) dt = b_i$ .

Si el **núcleo** fuera **infinito** tendríamos una suma infinita. En dicho caso, o sabemos sumar la serie, o tenemos que utilizar aproximaciones. Si fuera finito, como además es simétrico, tendríamos núcleos separables.

Siempre que la  $\lambda$  genérica del problema sea distinta de las  $\lambda_n$  de la homogénea, la ecuación integral tiene solución y esta es única.

Si  $\lambda = \lambda_p$  (es decir, a alguna de las  $\lambda_n$ ), sólo hay solución para algunos tipos de especiales de inhomogeneidades  $f(x)$ , que son las que satisfacen

$$\int_a^b f(x)\varphi_p(x)dx = 0. \quad (1.161)$$

Es decir,  $f(x)$  ha de ser ortogonal a la autofunción correspondiente al autovalor  $\lambda_p$ . En general las  $\varphi_p(x)$  pueden ser varias, que es el caso de degeneración, y las  $f(x)$  han de ser ortogonales a todas ellas.

A su vez, si  $f(x) = 0$ , caso homogéneo, sólo habrá solución cuando  $\lambda = \lambda_p$ , cosa que no se entiende pues, en las ecuaciones homogéneas  $\lambda$  sólo es un factor de proporcionalidad. Esto es una verdad de perogrullo. Si  $f(x)$  ha de ser ortogonal a la autofunción  $\varphi_p(x)$ , correspondiente al autovalor  $\lambda_p$ , esto ocurre siempre ya que  $f(x) = 0 \implies \int_a^b f(x)\varphi_p(x)dx = 0$ . en el caso de núcleos separables exigíamos la ortogonalidad a todas las autofunciones. Ahora no es preciso pues hemos exigido a 'priori' la simetría del núcleo.

Dado que, para  $\lambda = \lambda_p$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \\ &\implies \sum_{n \neq p} a_n \varphi_n(x) + a_p \varphi_p(x) = \\ &= \sum_{n \neq p} b_n \varphi_n(x) + b_p \varphi_p(x) + \sum_{n \neq p} \frac{\lambda}{\lambda_n} a_n \varphi_n(x) + \frac{\lambda}{\lambda_p} a_p \varphi_p(x). \end{aligned} \quad (1.162)$$

Como exigimos que, para  $\lambda = \lambda_p$ ,  $\int_a^b f(x)\varphi_p(x)dx = 0$ ,

$$\sum_{n \neq p} a_n \varphi_n(x) = \sum_{n \neq p} b_n \varphi_n(x) + \sum_{n \neq p} \frac{\lambda}{\lambda_n} a_n \varphi_n(x) \quad (1.163)$$

para cualquier  $i \neq p$ . De aquí que  $a_i = b_i + \lambda_p \frac{a_i}{\lambda_i}$  para cualquier  $i$ , con lo que  $a_p$  queda indeterminada, no sirviendo  $b_p$  para su cálculo. Por tanto,

$$\varphi(x) = f(x) + a_p \varphi_p(x) + \lambda_p \sum_{i \neq p} \frac{\int_a^b f(x)\varphi_i(x)dt}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(x), \quad (1.164)$$

quedando  $a_p$  como constante de integración.

**Ejemplo**

Sea la ecuación

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-1}^1 (x+t)\varphi(t)dt. \quad (1.165)$$

La solución de la homogénea ya la calculamos en otro ejemplo por ser de núcleos separables. Recordemos que

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int_{-1}^1 (x+t)\varphi(t)dt \implies \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \implies \varphi_1(x) = \frac{1-\sqrt{3}x}{2} \\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \varphi_2(x) = \frac{1+\sqrt{3}x}{2} \end{cases}. \quad (1.166)$$

Cuando  $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$  la inhomogénea tendrá solución y esta será única. Tomemos  $\lambda = 1$  con  $f(x) = x^2$ . En este caso

$$\begin{aligned} b_1 &= \int_{-1}^1 x^2 \varphi_1(x) dx = \frac{1}{3}, \\ b_2 &= \int_{-1}^1 x^2 \varphi_2(x) dx = \frac{1}{3} \implies \\ \varphi(x) &= x^2 + \frac{1/3}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} \left( \frac{1 - \sqrt{3}x}{2} \right) + \frac{1/3}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} \left( \frac{1 + \sqrt{3}x}{2} \right) \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^2 \frac{b_i}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(x) = x^2 - 2x - \frac{4}{3}. \end{aligned} \quad (1.167)$$

Si por un casual  $\lambda = \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , entonces empiezan a surgir los problemas y

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x^2 + a_p \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\sqrt{3} \int_{-1}^1 x^2 \left( \frac{1 - \sqrt{3}x}{2} \right) dx}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}} \left( \frac{1 - \sqrt{3}x}{2} \right) \\ &= x^2 + x \left( \frac{\sqrt{3} - 6\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{6a_p - 1}{12} \\ &= x^2 - \frac{5\sqrt{3}}{2}x + A_p. \end{aligned} \quad (1.168)$$

Habrá solución con  $A_p$  indeterminada cuando  $\int_{-1}^1 x^2 \varphi_2(x) dx = 0$ , cosa que hemos visto que no es cierta. En este caso no tenemos solución.

**Ejemplo**

Sea

$$\varphi(x) = \cos(x) + 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x+t)\varphi(t)dt. \quad (1.169)$$

Comenzamos por resolver la homogénea  $\varphi(x) = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x+t)\varphi(t)dt$ . Su núcleo es separable:  $k(x, t) = \sin(x+t) = \sin x \cos t + \cos x \sin t \implies$

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \sin x & M_1(t) &= \cos t \\ N_2(x) &= \cos x & M_2(t) &= \sin t, \end{aligned} \quad (1.170)$$

con lo que

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t dt = 0 & a_{12} &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = \pi \\ a_{21} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \pi & a_{22} &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t dt = 0. \end{aligned} \quad (1.171)$$

Por tanto, para todo  $\lambda$ ,

$$I - \lambda A = \begin{bmatrix} 1 & 0 - 2\pi \\ 0 - 2\pi & 1 \end{bmatrix} \quad (1.172)$$

Si nos fijamos, estas  $\lambda_i$  no coinciden con la  $\lambda$  genérica del problema. Las  $\lambda_i$  serán los autovalores de la E. integral homogénea que se obtienen de resolver

$$\det(I - \lambda A) = 1 - \pi^2 \lambda^2 \implies \lambda_{\pm} = \pm \frac{1}{\pi}. \quad (1.173)$$

La solución de la homogénea se obtendrá de

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda\pi \\ -\lambda\pi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.174)$$

Para  $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}, \implies y_1 - y_2 = 0 \implies y_1 = y_2 = C_1$ , degenerado. Entonces,

$$\varphi_1(x) = \sum_{i=1}^2 y_i(x) N_i(x) = C_1 (\sin x + \cos x). \quad (1.175)$$

Es fácil ver que

$$\varphi_2(x) = \sum_{i=1}^2 y_i(x) N_i(x) = C_2 (\sin x - \cos x). \quad (1.176)$$

Una vez obtenidas las autofunciones correspondientes a cada autovalor, se normalizan para barrer un espacio completo de funciones normadas:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1^2(x) dx &= C_1^2 \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) dx = 1 \\ &= C_1^2 (2\pi) \implies C_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned} \quad (1.177)$$

Lo mismo ocurre para  $\varphi_2(x)$ , con lo que

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sin x + \cos x), \\ \varphi_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sin x - \cos x). \end{aligned} \quad (1.178)$$

La  $\lambda = 2$  sólo contribuye aquí como un factor de proporcionalidad.

La **inhomogénea** se puede resolver por varios métodos. Sigamos con el de núcleos separables calculando

$$(I - \lambda A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2\pi \\ -2\pi & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 - 4\pi^2} \begin{bmatrix} 1 & 2\pi \\ 2\pi & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.179)$$

donde  $\lambda$  va a jugar ahora un papel crucial. Evidentemente, éste aún sería mayor si  $\lambda = \lambda_i$ , cosa que no ocurre en este caso.

Dado que

$$f_i = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) M_i(x) dx \implies \begin{cases} f_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \pi \\ f_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = 0 \end{cases}, \quad (1.180)$$

por lo que

$$\vec{y} = \widetilde{M} \vec{f} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-4\pi^2} & \frac{2\pi}{1-4\pi^2} \\ \frac{2\pi}{1-4\pi^2} & \frac{1}{1-4\pi^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{1-4\pi^2} \\ \frac{2\pi^2}{1-4\pi^2} \end{bmatrix} \quad (1.181)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_i y_i N_i(x) &= \cos x + \frac{2\pi}{1 - 4\pi^2} \sin x + \frac{2\pi^2}{1 - 4\pi^2} \cos x \\ &= \frac{2\pi^2}{1 - 4\pi^2} [\cos x + 2\pi \sin x] \end{aligned} \quad (1.182)$$

En este problema es claro que la inhomogeneidad sólo afecta a las constantes de integración.

Para resolver el problema por el método de **Hilbert-Schmidt** partimos de las autofunciones de la homogénea normalizadas. Aplicando directamente la fórmula de Schmidt,

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= f(x) + \lambda \sum_n \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x) \\
 &= \cos x + 2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sin x + \cos x) \cos x dx}{\frac{1}{\pi} - 2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sin x + \cos x) \\ + \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sin x - \cos x) \cos x dx}{-\frac{1}{\pi} - 2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sin x - \cos x) \end{array} \right\} \\
 &= \cos x + 2 \left\{ \frac{\pi/\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi} \frac{1-2\pi}{\pi}} (\sin x + \cos x) + \frac{-\pi/\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi} \frac{-1-2\pi}{\pi}} (\sin x - \cos x) \right\} \\
 &= \frac{1}{1 - 4\pi^2} [\cos x + 2\pi \sin x] \quad (1.183)
 \end{aligned}$$

Si, por lazos del demonio,  $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ , las cosas se complican un poco. El problema no tiene solución en este caso. Si lo tendría para otras  $f(x)$  ortogonales a  $\varphi_1(x)$ . Tomemos  $f(x) = a + bx$ , por ejemplo. Ahora

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} (a + bx) (\sin x + \cos x) dx \\
 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} &\left[ a \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx + a \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx + b \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx + b \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [2\pi b] = 0 \implies b = 0 \quad (1.184)
 \end{aligned}$$

con  $a$  cualquiera. Tomando  $a = 1$ , por sencillez,

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= f(x) + a_p \varphi_p(x) = 1 + a_p (\sin x + \cos x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
 &= 1 + C (\sin x + \cos x). \quad (1.185)
 \end{aligned}$$

## 1.10. Ecuaciones de Volterra

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) y(t) dt. \quad (1.186)$$

Estas ecuaciones son menos frecuentes que las de Fredholm, y de escaso interés es Física. Para resolverlas se considera acotado el recinto de integración, con  $0 \leq x \leq a$ . También se supone que el núcleo es continuo y acotado.

**Teorema:**

Las ecuaciones de Volterra no tienen valores propios. Es decir,  $y(x) = \lambda \int_0^x k(x, t)y(t)dt$  (homogénea) no tiene solución salvo la trivial  $y(x) = 0$ .

Dado que  $x$  está acotada,  $0 \leq x \leq a$ , entonces podemos generar  $B = \max |y(x)|$  y  $M = \max |k(x, t)|$ . Sustituyendo en la ecuación integral homogénea, acotamos la incógnita  $y(x)$ :

$$y(x) \leq \lambda \int_0^x MB dt \implies |y(x)| \leq |\lambda| MB \int_0^x dt = |\lambda| MBx. \quad (1.187)$$

Sustituimos  $y(x)$  en la ecuación integral, cambiando la variable  $x$  por  $t$ :

$$y(x) \leq \lambda \int_0^x M |\lambda| MBt dt \implies |y(x)| \leq |\lambda|^2 M^2 B \frac{x^2}{2}. \quad (1.188)$$

Repetiendo el proceso  $n$  veces,

$$|y(x)| \leq |\lambda|^n M^n B \frac{x^n}{n!} \leq |\lambda|^n M^n B \frac{a^n}{n!}. \quad (1.189)$$

En el límite  $n \rightarrow \infty$ ,

$$|y(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( |\lambda|^n M^n B \frac{a^n}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\lambda M a|^n}{n!} = 0, \quad (1.190)$$

que no es más que la solución trivial. Debido a esto, la ecuación de Volterra inhomogénea tiene solución para cualquier  $f(x)$  y para cualquier núcleo.

Las ecuaciones integrales de Volterra se resuelven por el **método de Neumann**:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) = f(x), \\ y_1(x) &= \int_0^x k(x, t)f(t)dt, \\ &\vdots \\ y_{n+1}(x) &= \int_0^x k(x, t)y_n(t)dt, \end{aligned} \quad (1.191)$$



y, finalmente,

$$y(x) = y_0(x) + \lambda y_1(x) + \cdots + \lambda^{n+1} y_{n+1}(x). \quad (1.192)$$

Calculamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{n+1} y_{n+1}(x)}{\lambda^n y_n(x)} = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} M a \frac{n!}{(n+1)!} = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M a}{n+1} = 0. \quad (1.193)$$

Es decir, la serie va a ser acotada. Llamemos  $N = \max |f(x)| \implies$

$$\begin{aligned} |y_0(x)| &\leq N, \\ |y_1(x)| &\leq M N x, \\ &\vdots \\ |y_n(x)| &\leq M^n N \frac{x^n}{n!} \leq M^n N \frac{a^n}{n!}. \end{aligned} \quad (1.194)$$

Es decir, todos los términos de la serie están acotados siempre que lo esté el recinto de definición, razón por la que el método de Neumann es aplicable, conduciendo a una serie convergente.



# Bibliografía

- [1] I. Petrovski, *Lecciones de teoría de las ecuaciones integrales*, Ed. Mir (Moscú, 1976).
- [2] H. T. Davis, *Introduction to nonlinear differential and integral equations*, Dover Pub. (Nueva York, 1962).
- [3] F. G. Tricomi, *Integral equations*, Dover Pub. (Nueva York, 1985).